

Radiales Druckprofil in einem magnetoplasmadynamischen Wasserstoff-Lichtbogen

II. 13-Momenten-Approximation

T. E. McCANN * und W. L. BOHN

DFVLR-Institut für Plasmadynamik, Stuttgart

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1344—1353 [1970]; eingegangen am 16. Februar 1970)

The calculation of the radial pressure profile of an MPD-arc as a function of the ambient pressure and the superimposed magnetic field as has been developed in a previous paper is extended to the 13-moments approximation. The higher moments approximation introduces additional thermomagnetic forces and changes significantly the structure of the velocity-dependant part of the external viscous forces. While the Hall-effect and the mass flow are practically unaffected by the higher approximation, as far as their influence on the radial pressure profile is concerned, the ambipolar diffusion leads to an appreciably smaller pressure increase than the 5-moments theory. Qualitative differences of the two approximations are discussed beyond the scope of pressure profiles via the generalized Ohm's law. Quantitative results for a partially as well as for a fully ionized plasma are shown in diagrams. The importance of thermomagnetic forces (especially the Nernst effect) for MPD-arcs is clearly pointed out.

I. Einleitung

In jüngster Zeit haben Druckmessungen von KLÜBER¹ und GRASSMANN² an einer zylindersymmetrischen Hochtemperatur-Plasmasäule mit überlagertem axialen Magnetfeld die Notwendigkeit bestätigt, thermomagnetische Kräfte in die äußeren Reibungskräfte der Plasmagrundgleichung mit einzubeziehen, um eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu erzielen. Weiterhin haben RAEDER und WIRTZ³ theoretisch gezeigt, daß in der oben skizzierten experimentellen Anordnung neben der von Wienecke vorausgesagten Druckerhöhung, eine zusätzliche Druckerhöhung durch die thermomagnetischen Kräfte mit wachsender Temperatur (proportional zu $T^{3/4}$) auftritt. Eine vollständige Ableitung der thermomagnetischen Kräfte ist nur dann möglich, wenn höhere Momente der Verteilungsfunktion herangezogen werden: 13-Momenten-Approximation. Dadurch ergibt sich eine prinzipielle Änderung des gesamten Reibungsterms im Vergleich zur 5-Momenten-Approximation der Schlüterschen Plasmagrundgleichung. In Anlehnung an die vorausgegangene Arbeit⁴, die wir im folgenden mit A bezeichnen werden, wollen wir die 13-Momenten-Theorie von

Raeder und Wirtz für die Berechnung des radialen Druckprofils eines magnetoplasmadynamischen Lichtbogens erweitern und dabei alle qualitativen und quantitativen Unterschiede zur 5-Momenten-Theorie unterstreichen. Die Erweiterung beinhaltet ähnlich wie in A die Divergenz der Magnetfeldlinien, das Vorhandensein einer Plasmaschwerpunkts-geschwindigkeit und die Abweichung vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht. Die Unterschiede hingegen liegen nicht nur in der Ergänzung durch thermomagnetische Kräfte, sondern auch in der veränderten Struktur des geschwindigkeits-abhängigen Anteils der Reibungskräfte. Weiterhin messen wir sowohl dem Hall-Effekt als auch der Masseneinströmung besondere Bedeutung in bezug auf das Druckprofil zu.

II. Theorie

BRAGINSKII⁵ hat für ein vollionisiertes Plasma im Magnetfeld die Plasmagrundgleichung im Rahmen der 13-Momenten-Approximation nach der allgemeinen Methode von Chapmann und Cowling abgeleitet. Feneberg hat dieses Verfahren auf ein dreikomponenten-Plasma erweitert. Wir gehen von den in der Arbeit von RAEDER und WIRTZ³ nieder-

Sonderdruckanforderungen an W. L. BOHN, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt Institut für Plasmadynamik, D-7000 Stuttgart

* Air Force Weapons Lab., Kirtland AFB, New Mexico

¹ O. KLÜBER, IPP-Bericht No. 3/48 [1966]. Institut für Plasmaphysik, Garching bei München.

² P. H. GRASSMANN, Z. Naturforsch. **23 a**, 251 [1968].

³ J. RAEDER u. S. WIRTZ, Z. Naturforsch. **23 a**, 1695 [1968].

⁴ W. L. BOHN u. T. E. McCANN, Z. Naturforsch. **25 a**, [1970]; voranstehende Arbeit.

S. I. BRAGINSKII, J. Exp. Theor. Phys. USSR **33**, 459 [1957].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

geschriebenen Grundgleichung aus, die das Plasma streng genommen durch 8 Momente der Verteilungsfunktion beschreiben: die Dichte (Moment 0. Ordnung), die drei Komponenten der Geschwindigkeit (Momente 1. Ordnung), der skalare Druck (Moment 2. Ordnung) und die drei Komponenten des Wärmestroms (Momente 3. Ordnung). Unter diesen Voraussetzungen lauten die Impulsgleichungen für Ionen, Elektronen und Atome

$$\varrho_i \mathbf{D}_i + \nabla p_i - e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{L} \mathbf{j} + \mathbf{K} \nabla T, \quad (1)$$

$$\varrho_e \mathbf{D}_e + \nabla p_e + e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) = \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{j} + \mathbf{E} \nabla T \quad (2)$$

und

$$\varrho_o \mathbf{D}_o + \Delta p_o = -(\mathbf{G} + \mathbf{D}) \mathbf{u} - (\mathbf{F} + \mathbf{L}) \mathbf{j} - (\mathbf{E} + \mathbf{K}) \nabla T. \quad (3)$$

Dabei haben wir uns auf stationäre Plasmen beschränkt und

$$\frac{\partial \varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha = \varrho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha \equiv \varrho_\alpha \mathbf{D}_\alpha$$

gesetzt.

Der Index $\alpha = i, e$ oder o bezieht sich jeweils auf Ionen, Elektronen oder Atome. Es sind $p_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, \varrho_\alpha, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}$ und T jeweils der skalare Druck der Komponente α , die mittlere Geschwindigkeit, die Massendichte, die elektrische Feldstärke, die magne-

tische Feldstärke, die Stromdichte und die als einheitlich vorausgesetzte Temperatur. Weiterhingenelten die Definitionen für die Schwerpunktschwindigkeit der Ladungsträger $\varrho_L \mathbf{v}_L = \varrho_e \mathbf{v}_e + \varrho_i \mathbf{v}_i$ mit $\varrho_L = \varrho_e + \varrho_i$ für die Schwerpunktschwindigkeit des gesamten Plasmas $\varrho \mathbf{U} = \varrho_L \mathbf{v}_L + \varrho_o \mathbf{v}_o$ mit $\varrho = \varrho_L + \varrho_o$, und für die Stromdichte $\mathbf{j} = e n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$, sowie $\mathbf{u} = \mathbf{v}_L - \mathbf{U}$. Im folgenden führen wir neben der Quasineutralitätsbedingung $n_e = n_i = n$ die Vernachlässigungen $m_i \approx m_o$ und $m_e/m_i \ll 1$ ein. Die Tensoren $\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{L}$ und \mathbf{K} sind Funktionen der Dichten n und n_o , der Zyklotronfrequenzen ω_i und ω_e , der mittleren Stoßzeiten zwischen den drei Plasmakomponenten und des Magnetfeldes. Die auf den rechten Seiten der Gln. (1) bis (3) erscheinenden Produkte eines Tensors mit einem Vektor können jeweils mit Hilfe der üblichen Abkürzungen

$$\mathbf{u}_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}); \quad \mathbf{u}_\perp = \mathbf{h} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$$

in ein kartesisches Dreibein relativ zum lokalen Magnetfeld aufgespalten werden; so z. B.

$$\mathbf{D} \mathbf{u} = d_1 \mathbf{u}_\parallel + d_2 \mathbf{u}_\perp + d_3 (\mathbf{u} \times \mathbf{h}).$$

Ähnliches gilt für die Tensoren $\mathbf{F}, \mathbf{E}, \dots$. Die dabei auftretenden Skalare $d_1, d_2, d_3; f_1, f_2, f_3; e_1, e_2, e_3, \dots$, sind in der Referenz³ ausführlich angegeben. Die Tensoren selbst weisen dabei alle ohne jede Einschränkung von seiten der Geometrie und des Magnetfeldes eine einheitliche Struktur auf; so z. B.

$$\mathbf{D} = B^{-2} \begin{pmatrix} d_1 B_r^2 + d_2 (B_\varphi^2 + B_z^2) & d_1 B_r B_\varphi - d_2 B_r B_\varphi + d_3 B_z B & d_1 B_r B_z - d_2 B_r B_z - d_3 B_\varphi B \\ d_1 B_r B_\varphi - d_2 B_r B_\varphi - d_3 B_z B & d_1 B_\varphi^2 + d_2 (B_r^2 + B_z^2) & d_1 B_\varphi B_z - d_2 B_\varphi B_z + d_3 B_r B \\ d_1 B_r B_z - d_2 B_r B_z + d_3 B_\varphi B & d_1 B_\varphi B_z - d_2 B_\varphi B_z - d_3 B_r B & d_1 B_z^2 + d_2 (B_r^2 + B_\varphi^2) \end{pmatrix}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch für die Tensoren $\mathbf{F}, \mathbf{E}, \dots$ sofern die Skalare d_1, d_2, d_3 durch die entsprechenden Skalare $f_1, f_2, f_3; e_1, e_2, e_3, \dots$ ersetzt werden. Schon an dieser Stelle ist ein grundsätzlicher Unterschied zu den Grundgleichungen wie sie in A benutzt worden sind, sichtbar: einerseits sind die äußeren Reibungskräfte der Gln. (1) bis (3) durch thermomagnetische Kräfte (proportional ∇T) ergänzt, andererseits ist aber auch der geschwindigkeitsabhängige Anteil dieser Reibungskräfte verändert. Um diesen zweiten Punkt zu klären, vergleichen wir den von der Geschwindigkeit abhängigen Anteil der Reibungskraft in der 5-Momenten-Approximation $R_u^{(5)}$ und in der 8-Momenten-Approximation $R_u^{(8)}$, am Beispiel der Impulsgleichung der Elektronen. Zu diesem Zweck schreiben wir den Reibungsterm (siehe Ausdruck $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ in A, Abschnitt

II.1) als Funktion der hier eingeführten Variablen \mathbf{u} und \mathbf{j} um:

$$\mathbf{R}_u^{(5)} = -n \varepsilon_{eo} (n + n_o) \mathbf{u} + \frac{1}{e} (n \varepsilon_{ei} + n_o \varepsilon_{eo}) \mathbf{j}. \quad (4)$$

Aus Gl. (2) erhalten wir

$$\mathbf{R}_u^{(8)} = \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{j}. \quad (5)$$

Während der Vektor $\mathbf{R}_u^{(5)}$ in der (\mathbf{u}, \mathbf{j}) Ebene liegt, kann der Vektor $\mathbf{R}_u^{(8)}$ eine Richtung außerhalb dieser Ebene einnehmen. Quantitativ fragen wir, wann die Beziehungen (4) und (5) gleich sind. Im Fall einer zylindersymmetrischen Geometrie ($j_r = B_r = 0$) ist eine übersichtliche Antwort dieser Frage möglich, wenn wir die Beziehungen komponentenweise gleichsetzen, also

$$d_2 u_r \left[1 + \frac{d_3 u_\varphi + f_3 j_\varphi}{d_2 u_r} \right] = \alpha_1 u_r, \quad (6)$$

$$(d_2 u_\varphi + f_2 j_\varphi) \left[1 - \frac{d_3 u_r}{d_2 u_\varphi + f_2 j_\varphi} \right] = \alpha_1 u_\varphi + \alpha_2 j_\varphi, \quad (7)$$

wobei wir $\alpha_1 = n \varepsilon_{e0} (n + n_0)$ und $\alpha_2 = (1/e) (n \varepsilon_{e1} + n_0 \varepsilon_{e0})$ gesetzt haben. Nun kann man zeigen, daß für $\omega_e \tau_e \gg 1$ die Beziehungen $d_2 = \alpha_1$ und $f_2 = \alpha_2$ erfüllt sind. Somit wird die gestellte Frage darauf zurückgeführt, wie groß jeweils der zweite Term in der eckigen Klammer der Gln. (6) und (7) in bezug auf die Einheit ist. Da dieser Term nicht nur von den Koeffizienten d, f , sondern auch von der Größe der Plasmaparameter u und j abhängt, ist eine allgemein physikalische Antwort nicht möglich. Eine Beantwortung als Funktion einer spezifischen Auswahl von Plasmaparametern erscheint uns daher gegeben. Wir werden sie im Abschnitt IV anhand des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes gesondert angeben, da sie unabhängig von dem hier betrachteten Problem des radialen Druckprofils allgemeine Gültigkeit besitzt.

Wir kommen jetzt auf die eigentliche Berechnung des radialen Druckgradienten zurück. Wie in A schon ausführlich beschrieben, weist die für das gesamte Plasma zuständige Euler-Gleichung

$$\varrho \mathbf{D} + \nabla p - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

bei Bildung der r -Komponente sowohl einen klassischen gasdynamischen als auch einen elektromagnetischen Anteil zum radialen Druckprofil auf. Unterschiede, die auf die höheren Momente zurückzuführen sind, gelangen natürlich über die aus den Impulsgleichungen erhaltene Stromdichte in die Berechnung des Druckprofils. Nach dem gleichen Verfahren wie in A, drücken wir zuerst v_i, v_e und v_0 in den Gln. (1) bis (3) mit Hilfe der üblichen Definition als Funktion von v_L, U und j aus, eliminieren anschließend v_L und U_φ und drücken mit der Annahme eines zu vernachlässigenden Eigenfeldes die azimuthale Stromdichte als Funktion des partialen Druckgradienten der Atome, des meridionalen Geschwindigkeitsfeldes (U_r, U_z) und des meridionalen Stromdichtefeldes (j_r, j_z) senkrecht zu \mathbf{B} sowie des radialen Temperaturgradienten aus

$$j_\varphi = \Delta_1 (\delta_1 \nabla_r p_0 + \delta_2 U_r + \delta_3 U_z + \delta_4 j_r + \delta_5 j_z + \delta_6 \nabla_r T). \quad (9)$$

Die Hilfsgrößen Δ_1 und δ_α ($\alpha = 1$ bis 6) sind im Anhang I ausführlich niedergeschrieben. Dabei haben wir folgende Annahmen vorausgesetzt:

a) Der Druckgradient der Atome soll in radialer Richtung größer sein als in axialer Richtung; genauer $\nabla_r p_0 / \nabla_z p_0 > B_r / B_z$. Da wir uns auf solche Geometrien beschränken, deren Feldlinien nur eine schwache Divergenz zeigen ($B_r \ll B_z$), ist die obige Ungleichung leicht erfüllt. Im übrigen ist die Bedingung $B_r \ll B_z$, hier noch von größerer Bedeutung als in A, weil sie eine wesentliche Vereinfachung der Tensoren $\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \dots$ erlaubt.

b) Der Impuls in azimuthaler Richtung wird im wesentlichen durch die Ionen transportiert: $\varrho D_\varphi \approx \varrho_i D_{i,\varphi}$. Das geht einerseits aus dem Massenverhältnis m_e/m_i , andererseits aus experimentellen Befunden ($v_{0,\varphi} \ll v_{i,\varphi}$) hervor.

c) Auf letztere stützen wir ebenfalls die Annahme $\varrho_0 D_{0,r}$ und $\varrho_0 D_{0,z}$ relativ zu den anderen Konvektionsgliedern vernachlässigen zu dürfen.

Eine ausführlichere Diskussion dieser Punkte ist in A gegeben. Völlig neu hingegen ist die zusätzliche Annahme:

d) Der Temperaturgradient in axialer Richtung soll klein sein im Vergleich zu dem in radialer Richtung ($\nabla_z T \ll \nabla_r T$). Eine direkte Messung des Temperaturfeldes in einem MPD-Bogen ist bislang nicht bekannt. Experimentelle Abschätzungen anhand der radialen und axialen Verläufe der Emissionskoeffizienten von zahlreichen Spektrallinien⁶ zeigen jedoch, daß die geforderte Bedingung in weiten Bereichen eines MPD-Bogens erfüllt ist.

Wir setzen den Rechengang fort, indem wir in der r -Komponente der Euler-Gleichung j_φ aus Gl. (9) und $\nabla_r p_0$ aus der Druckgleichung substituieren. Den Ionisationsgrad bestimmen wir über die Korona-Gleichung $n_e/n_0 = C$ (siehe A). Somit erhalten wir aus der Druckgleichung

$$\nabla_r p = \nabla_r p_0 (1 + 2C) + 2p_0 \nabla_r C$$

und aus Gl. (8) schließlich

$$\nabla_r p_0 = \frac{-2p_0 \nabla C + B_z \Delta_1 (\delta_2 U_r + \delta_3 U_z + \delta_4 j_r + \delta_5 j_z + \delta_6 \nabla_r T) - \varrho D_r}{1 + 2C - \delta_1 \Delta_1 B_z}. \quad (10)$$

Das lokale Magnetfeld kann, wie in A gezeigt wird, auch bei leichten Abweichungen von der Zylindersymmetrie als Funktion des lokalen Drucks, des

⁶ M. KLING u. M.-U. BETH, 9-th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Bucarest, Sept. 1–6 [1969], Contributed Paper 3.3.6 (p. 341).

Außendrucks sowie des angelegten Magnetfeldes mit Hilfe von Gl. (8) und der Maxwell-Gleichung $\mathbf{j} = (1/\mu_0) \nabla \times \mathbf{B}$ ausgedrückt werden. In integrierter Form gilt

$$B_z^2 - B_{z,A}^2 = 2\mu_0(p_A - p),$$

wobei $B_{z,A}$ und p_A jeweils die angelegte Magnetfeldstärke bzw. den Außendruck darstellen.

Mit der Diff.-Gl. (10) für den Partialdruck der Atome ist das gesamte radiale Druckprofil über die Gleichung

$$p = p_0 + p_e + p_i = p_0(1 + 2C)$$

als Funktion der Temperatur und der meridionalen \mathbf{j} - und \mathbf{U} -Felder bestimmt. Numerische Ergebnisse werden im folgenden für verschiedene $B_{z,A}$ und p_A , für ein Gaußsches Temperaturprofil

$$(T_A = 25 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}, T_R = 5 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K})$$

und für eine durch $B_r/B_z = 0.05 |r|$ vorgegebene Divergenz der Magnetfeldlinien als Funktion des auf die Einheit normierten Plasmaradius r gezeigt.

III. Diskussion der verschiedenen Beiträge zum Druckprofil

Um die Beiträge der verschiedenen physikalischen Effekte zum radialen Druckprofil klarzustellen, lösen wir die Gl. (10) für jeden Term gesondert. Dadurch ergibt sich in entsprechender Reihenfolge folgende Einteilung für die Diskussion: ambipolare Diffusion (Term proportional zu $\nabla_r C$); Massenstrom ($\sim U_r, U_z$); Hall-Effekt ($\sim j_r, j_z$); thermomagnetischer Effekt ($\sim \nabla_r T$) und klassischer gasdynamischer Beitrag ($\sim D_r$). Wegen der starken Analogien wollen wir die Diskussionspunkte im wesentlichen auf die Unterschiede zu A beschränken.

1. Ambipolare Diffusion

Die durch den radialen Temperaturgradienten hervorgerufene ambipolare Diffusion wird durch ein angelegtes axiales Magnetfeld gehemmt und führt über induzierte azimuthale Ströme zu einer Druckerhöhung in der Plasmachse.

Diese radiale Druckerhöhung ist dem Gradienten des Ionisationsgrades in radialer Richtung proportional und kann somit bei Benutzung einer Ionisationsgleichung allein als Funktion der Temperatur berechnet werden, solange der MPD-Bogen Zylindersymmetrie oder diesbezüglich nur kleine Ab-

weichungen aufweist. Abb. 1 zeigt den relativen Druckanstieg für einen Außendruck $p_A = 10^3$ [dyne/cm²] und angelegte Magnetfeldstärken von 1 bis 5 kG. Während die ausgezogenen Kurven

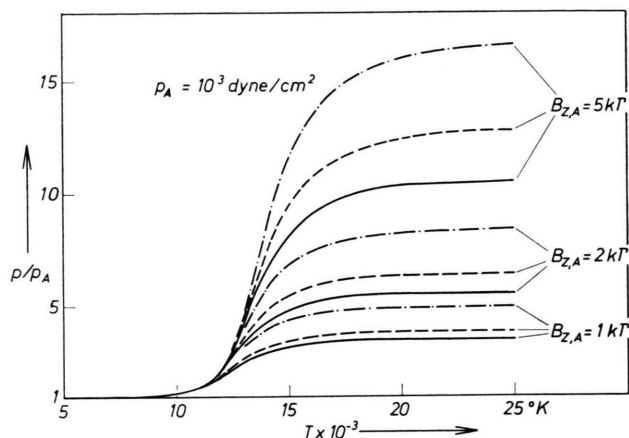


Abb. 1. Druckerhöhung in Abhängigkeit der Temperatur für einen Außendruck p_A und verschiedene angelegte Magnetfeldstärken $B_{z,A}$. Durchgezogene bzw. gestrichelte Kurven beziehen sich jeweils auf Rechnungen in der 8-Momenten und 5-Momenten Näherung. Die strichpunktierten Kurven sind am Ende des Abschnitts IV diskutiert.

sich auf die 8-Momenten-Approximation beziehen [erster Term der Gl. (10)], entsprechen die gestrichelten Kurven der in A dargelegten 5-Momenten-Approximation. Da die thermomagnetischen Kräfte hier noch nicht in Betracht gezogen worden sind, ist der Unterschied zwischen beiden Näherungen auf den ersten Blick überraschend. Die Betrachtung höherer Momente liefert aber nicht nur einen thermomagnetischen Anteil zu den Reibungskräften [siehe Gln. (4) und (5)], sondern verändert auch die Struktur ihres geschwindigkeitsabhängigen Teils⁷. Darauf wollen wir in Abschnitt IV noch ganz allgemein eingehen.

2. Massenstrom

Wir wenden uns nun der für MPD-Bögen charakteristischen Masseneinsaugung ($U \neq 0$) zu und setzen das in Abb. 2 oben links eingezeichnete Geschwindigkeitsprofil voraus. Das sich aus ambipolarer Diffusion und Massenströmung ergebende Druckprofil ist ebenfalls in Abb. 2 sowohl in der 5-Momenten- als auch in der 8-Momenten-Approximation

⁷ T. E. McCANN, 9-th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Bucarest, Sept. 1–6 [1969], Contributed Paper 4.1.4.2 (p. 387).

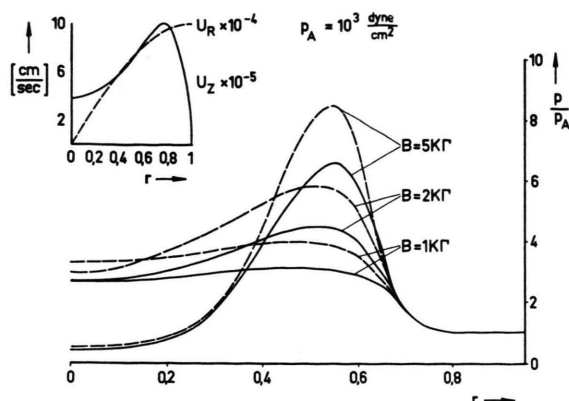


Abb. 2. Relativer Druckverlauf in Abhängigkeit des normierten Plasmaradius: 8-Momenten Näherung (—); 5-Momenten Näherung (---). Das vorgegebene Strömungsfeld ist oben links eingezeichnet.

mation dargestellt. Im Bereich $0,4 \leq r \leq 0,6$ treten starke Abweichungen auf; es ist der Bereich, in dem der radiale Gradient des Ionisationsgrades am größten ist, d.h. das Druckprofil wird dort fast ausschließlich von der ambipolaren Diffusion bestimmt. Der eigentliche Einfluß des Massenstroms scheint kaum durch die höhere Näherung geändert zu werden.

3. Hall-Effekt

Wir nennen Hall-Effekt im weiteren Sinn, den Anteil am Druckprofil, der durch die meridionale Stromdichte senkrecht zum Magnetfeld, also durch den 4. und 5. Term in Gl. (10) zustande kommt. Je nach Richtung des Stromes relativ zum Magnetfeld ist eine Druckerhöhung oder -erniedrigung zu erwarten.

Wir nehmen einen für MPD-Lichtbögen in etwa charakteristischen Stromdichteverlauf

$$j_r \sim r e^{-r^2} \quad \text{und} \quad j_z \sim e^{-r^2}$$

an (in Anlehnung an Experimente), und berechnen das durch Hall-Effekt und ambipolare Diffusion erzeugte Druckprofil für $p_A = 10^3$ [dyne/cm²] und einem angelegten Magnetfeld von 1 kΓ. Das aus den Rechnungen resultierende $j_{m\perp}$ ist in Abb. 3 oben rechts eingezeichnet. Wir vergleichen das Ergebnis in Abb. 3 sowohl mit Resultaten aus der 5-Momenten-Approximation als auch mit dem allein durch ambipolare Diffusion hervorgerufenen Druckberg.

Der schon im vorigen Abschnitt herausgestellte Unterschied in der Höhe des Druckplateaus bei Berücksichtigung der ambipolaren Diffusion allein,

wird wieder deutlich. Die über das jeweilige Druckplateau zusätzlich erscheinende Druckerhöhung durch Hall-Effekt ist, wie aus Abb. 3 deutlich zu erken-

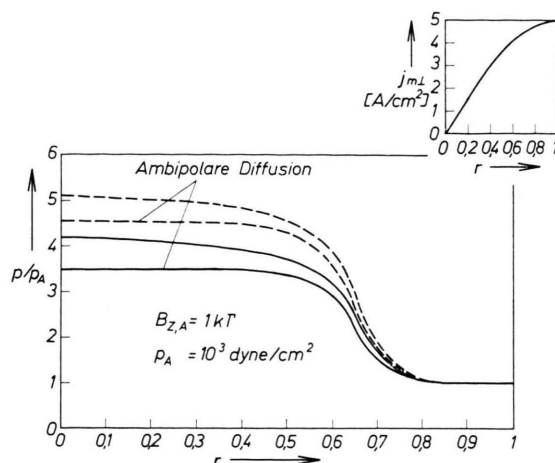


Abb. 3. Relativer Druckverlauf in Abhängigkeit des normierten Plasmaradius durch ambipolare Diffusion allein und mit Hall-Effekt: 8-Momenten Näherung (—); 5-Momenten Näherung (---).

nen, in beiden Näherungen praktisch gleich. Somit ist also der Nettobeitrag des Hall-Effekts zur Druckerhöhung von der höheren Näherung nicht betroffen.

Ein relativer Vergleich der Beiträge des Hall-Effektes und des Massenstroms fällt daher ähnlich wie in der 5-Momenten-Theorie aus und soll hier nicht wiederholt werden (siehe Abb. 9 in A).

4. Thermomagnetischer Effekt

Die höhere Approximation führt insbesondere auf den nun zu betrachtenden Term ($\sim \nabla_r T$), der in den Referenzen ^{1,2,8} in Anlehnung an ältere Literatur als Nernst-Effekt bezeichnet wird. Das aus ambipolarer Diffusion und Nernst-Effekt resultierende Druckprofil kann natürlich unter den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 1 als Funktion der Temperatur allein ausgedrückt werden und ist in Abb. 4 aufgetragen. Die gestrichelten Kurven entsprechen Rechnungen, in denen der Ionisationsgrad durch die Saha-Gleichung festgelegt ist: sie verifizieren die von RAEDER und WIRTZ³ erhaltenen Resultate. Die durchgezogenen Kurven beziehen sich wieder auf Rechnungen mit der Korona-Gleichung, während die strichpunktierten Kurven für Rechnungen mit der Korona-Gleichung aber ohne

⁸ P. H. GRASSMANN, O. KLÜBER u. H. WULFF, Physics Letters **24 A**, 324 [1967].

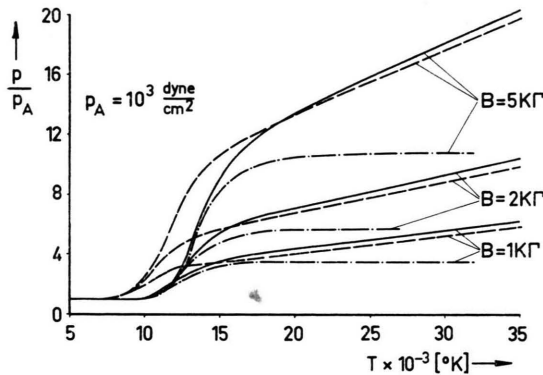


Abb. 4. Relativer Druckverlauf durch ambipolare Diffusion und Nernst-Effekt: (—) Korona-Gleichung; (---) Saha-Gleichung; (- · - · -) Korona-Gleichung aber ohne Berücksichtigung des Nernst-Effekts.

thermomagnetische Kräfte gelten. Die beiden letzten Kurven sind erwartungsgemäß zu höheren Temperaturen hin verschoben; der Einfluß des Nernst-Effekts ist der einer weiteren Druckerhöhung proportional zur Temperatur ($\sim T^{3/4}$). Wir greifen nun auf das Beispiel der Abb. 2 zurück und berechnen das Druckprofil unter Berücksichtigung der ambipolaren Diffusion, des Massenstroms und schließen jetzt aber die thermomagnetischen Kräfte ein. Abb. 5 zeigt die Ergebnisse für Magnetfeld-

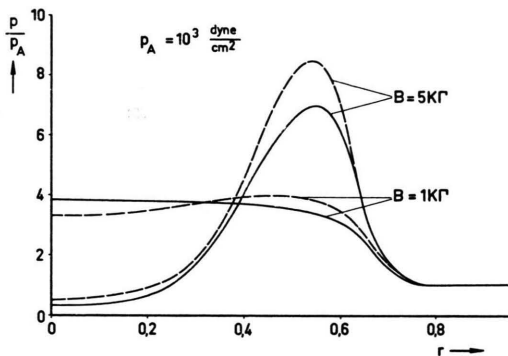


Abb. 5. Relativer Druckverlauf durch ambipolare Diffusion, Massenströmung (wie in Abb. 2 vorgegeben) und Nernst-Effekt: (—) 8-Momenten und (---) 5-Momenten Approximation.

stärken von 1 und 5 kGauß. Obwohl der Nernst-Effekt bei 25000 °K Achsentemperatur schon sichtbar Bedeutung erlangen sollte (siehe Abb. 4), wird er offensichtlich durch den Einfluß des Massenstroms völlig kompensiert. Bis auf Unterschiede im Beitrag der ambipolaren Diffusion stimmen die Ergebnisse mit der 5-Momenten-Approximation überein. Da der nach innen gerichtete Massenstrom einen relativ

zum Nernst-Effekt entgegengerichteten Beitrag zum Druckprofil liefert, wollen wir über das Einzelbeispiel hinaus die Vorzugsbereiche der beiden Effekte als Funktion der maßgebenden Plasma-parameter allgemein untersuchen. Setzen wir die durch den Massenstrom und den Nernst-Effekt verursachten Beiträge zur azimuthalen Stromdichte in Gl. (9), $j_{\varphi,U}$ und $j_{\varphi,T}$ gleich, so erhalten wir das Verhältnis

$$\nabla_r T / U_r = (\delta_2 + \delta_3 U_z / U_r) / \delta_6,$$

welches die gewünschte Bereichsaufteilung beschreibt. Leider ist es nicht nur eine Funktion der Temperatur und des Druckes, sondern auch der speziellen Geometrie (B_r/B_z ; U_z/U_r) des Experiments. Wir verzichten deshalb an dieser Stelle auf eine Diskussion des Verhältnisses $\nabla_r T / U_r$ und kommen auf die zu untersuchende Bereichsaufteilung im folgenden Kapitel zurück.

5. Gasdynamischer Effekt und Abweichung vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht

Der Beitrag des Konvektionsgliedes zum Druckprofil ist durch die höhere Approximation kaum beeinflusst und führt auf Ergebnisse der klassischen Gasdynamik zurück; wir verweisen daher auf die Diskussion in Abschnitt III.4 von A.

Die Abweichung vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht ist nur zum Teil durch die Benutzung der Korona-Gleichung berücksichtigt worden. Der wesentlich gravierendere Einfluß einer Verschleppung der Ionisationszustände ist allerdings von der höheren Approximation nicht prinzipiell betroffen und kann daher von der Arbeit A (Abschnitt III.5) übernommen werden; die Druckerhöhung durch ambipolare Diffusion wird mit zunehmender Verschleppung abgebaut.

IV. Diskussion des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes

Die Betrachtung höherer Momente hat nicht nur zu einem zusätzlichen (thermomagnetischen) Term, sondern auch zur Veränderung des geschwindigkeitsabhängigen Anteils des Reibungsterms in den Impulsgleichungen geführt. Der erstgenannte Unterschied ist in Abschnitt III.4 hinreichend klar geworden und außerdem in der Literatur^{1, 2, 3, 8} ausgiebig diskutiert. Der letztgenannte Unterschied zwischen 5-Momenten- und 8-Momenten-Theorie ist

zwar besonders am Beispiel der ambipolaren Diffusion deutlich geworden, wir möchten ihn aber darüber hinaus in allgemeiner Form erläutern. Dazu leiten wir in bekannter Weise das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz von den Impulsgleichungen der Ladungsträger ab. Wir betrachten weiterhin ein 3-Komponenten-Plasma und erhalten mit den in Abschnitt II eingeführten Definitionen

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{e} (\mathbf{D}_i - \mathbf{D}_e) - \mathbf{E} - \mathbf{v}_L \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ - \frac{1}{en_e} \nabla p_e = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \mathbf{G} - \mathbf{D} \right) \mathbf{u} \\ + \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \mathbf{L} - \mathbf{F} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \mathbf{K} - \mathbf{E} \right) \nabla T \end{aligned} \quad (11)$$

Da die linken Seiten der Gln. (11) und (12) identisch sind, konzentrieren wir uns auf die jeweiligen rechten Seiten $\mathbf{O}_R^{(8)}$ bzw. $\mathbf{O}_R^{(5)}$, in denen wir die auftretenden Tensor-Vektor-Produkte genau wie in Abschnitt II relativ zum Magnetfeld aufspalten. Entsprechend dem Ziel unserer Diskussion werden wir im folgenden die thermomagnetischen Terme nicht mehr aufschreiben. Somit erhalten wir für die rechten Seiten der Gln. (11) und (12):

$$\mathbf{O}_R^{(8)} = A_{u_{\parallel}}^{(8)} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} + A_{u_{\perp}} \cdot \mathbf{u}_{\perp} + A_{u \times h} (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) + \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{(8)}} \mathbf{j}_{\parallel} + \frac{1}{\sigma_{\perp}^{(8)}} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{1}{en_e} H^{(8)} (\mathbf{j} \times \mathbf{h}) \quad (13)$$

und

$$\mathbf{O}_R^{(5)} = A_u^{(5)} (\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) + \frac{1}{\sigma_o^{(5)}} (\mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}), \quad (14)$$

wobei

$$\begin{aligned} A_{u_{\parallel}}^{(8)} &= \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} g_1 - d_1 \right); \quad A_{u_{\perp}}^{(8)} = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} g_2 - d_2 \right); \quad A_{u \times h}^{(8)} = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} g_3 - d_3 \right); \\ \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{(8)}} &= \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} l_1 - f_1 \right); \quad \frac{1}{\sigma_{\perp}^{(8)}} = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} l_2 - f_2 \right); \quad H^{(8)} = \frac{m_e}{m_i} l_3 - f_3; \\ A_u^{(5)} &= \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \gamma_1 - \beta_1 \right); \quad \frac{1}{\sigma_o^{(5)}} = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \gamma_2 - \beta_2 \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B. \end{aligned}$$

Wie schon vorher angegeben, sind die hier sowie in der Folge auftretenden Koeffizienten in der Referenz³ zu finden. Abgesehen vom Auftreten thermomagnetischer Terme sind die Unterschiede der 8-Momenten-Approximation in bezug auf die ältere Theorie anhand der Gln. (13) und (14) leicht zu erkennen:

1. Die Koeffizienten von \mathbf{j}_{\parallel} und \mathbf{j}_{\perp} sind verschieden; d.h. die Leitfähigkeit ist anisotrop.
2. Bringen wir den letzten Term der Gl. (13) wieder auf deren linke Seite, so erscheint der Hall-Term mit einem Faktor $(1 - H^{(8)}/B)$.
3. Die Koeffizienten von \mathbf{u}_{\parallel} und \mathbf{u}_{\perp} sind verschieden; d.h. der Faktor des Geschwindigkeitsterms ist, ähnlich wie die Leitfähigkeit, anisotrop.
4. Zusätzlich erscheint ein Term proportional zu $\mathbf{u} \times \mathbf{h}$, der formal ganz analog zum Hall-Term ist.

Bevor wir auf die einzelnen Punkte näher eingehen, möchten wir daran erinnern, daß die aus der

in der 8-Momenten-Approximation, und

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{e} (\mathbf{D}_i - \mathbf{D}_e) - \mathbf{E} - \mathbf{v}_L \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ - \frac{1}{en_e} \nabla p_e = \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \gamma_1 - \beta_1 \right) \mathbf{u} \\ + \frac{1}{en_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \gamma_2 - \beta_2 \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (12)$$

in der 5-Momenten-Approximation; wobei wir

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -n \varepsilon_{eo} (n + n_o); \quad \beta_2 = \frac{1}{e} (n \varepsilon_{ei} + n_o \varepsilon_{eo}); \\ \gamma_1 &= -n \varepsilon_{io} (n + n_o); \quad \gamma_2 = -\frac{1}{e} \left(n \varepsilon_{ie} + \frac{m_e}{m_i} n_o \varepsilon_{io} \right) \end{aligned}$$

gesetzt haben.

Statistik abgeleiteten Stoßzeiten $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ zwar in der Größenordnung der inversen „mittleren Flugzeiten“ liegen, wie sie in der Gasdynamik definiert sind, mit ihnen aber nicht identisch sind.

Die in Punkt 1 erwähnte Anisotropie der Leitfähigkeit ist in Abb. 6 als Funktion von Druck und Temperatur am Verhältnis $\sigma_{\perp}^{(8)}/\sigma_{\parallel}^{(8)}$ dargestellt. Bei höherem Druck und geringerem Magnetfeld ist die Anisotropie erwartungsgemäß weniger ausgeprägt. Bei abgeschlossener Ionisation wird die bekannte Beziehung $\sigma_{\perp}^{(8)}/\sigma_{\parallel}^{(8)} = 0,51$ ($\approx 1/2$) verifiziert. Weiterhin stimmen die Ausdrücke für $1/\sigma_{\parallel}^{(8)}$ und $1/\sigma_o^{(5)}$ überein, wenn wir in der 5-Momenten-Theorie

$$\begin{aligned} v_{ei} (1 - 0,9 \tau_e v_{ei} + 0,3 \tau_e v_{eo}) \quad \text{anstatt} \quad v_{ei} \\ v_{eo} (1 - 0,1 \tau_e v_{eo} + 0,3 \tau_e v_{ei}) \quad \text{anstatt} \quad v_{eo} \end{aligned} \quad (15)$$

und

$$v_{io} \left[1 - 0,1 \tau_o v_{oi} - 0,1 \tau_i v_{io} \left(1 - \frac{\tau_o}{\tau_{oi}} \right)^2 \right] \text{anstatt} \quad v_{io}$$

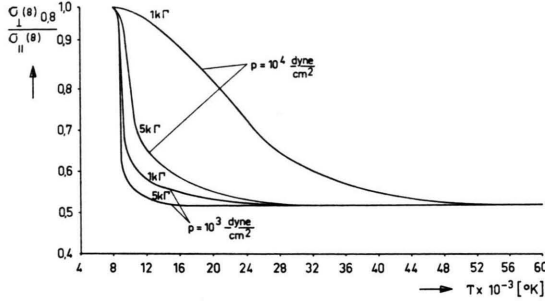


Abb. 6. Verhältnis der elektrischen Leitfähigkeit senkrecht und parallel zum Magnetfeld in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Magnetfeldstärke.

schreiben. Für ein vollionisiertes Plasma müssen wir beispielsweise

$$\nu_{ei}(1 - 0,9 \tau_e \nu_{ei}) \approx \frac{1}{2} \nu_{ei} \quad \text{anstatt} \quad \nu_{ei}$$

schreiben. Das gleiche Ergebnis, bezogen auf ein vollionisiertes Plasma, ist in der Arbeit von KLÜBER¹ (Seite 76) zu finden, in der ein Vergleich der Leitfähigkeit aus der Braginskiischen Theorie mit der klassischen Leitfähigkeit angestellt wird. Aus den Beziehungen (16) sehen wir, daß die Stoßzeiten nicht nur um einen Zahlenfaktor, sondern funktionell im Sinn einer Wechselwirkung mit dem dritten Partner geändert werden.

Das unter 2. angeführte Verhältnis $-H^{(8)}/B$ im Hall-Term ist in Abb. 7 als Funktion von Druck und Temperatur aufgetragen. Es erreicht zwischen $12 \cdot 10^3$ °K und $15 \cdot 10^3$ °K ein ausgeprägtes Maximum. Bei abgeschlossener Ionisation geht $-H^{(8)}/B$ bis auf einen Zahlenfaktor in den Ausdruck $(\omega_e \tau_e)^{-2}$ über (vgl. Ref. 1). Die Temperaturabhängigkeit, nämlich $\sim T^{-3}$, ist für diesen Bereich sofort ersichtlich.

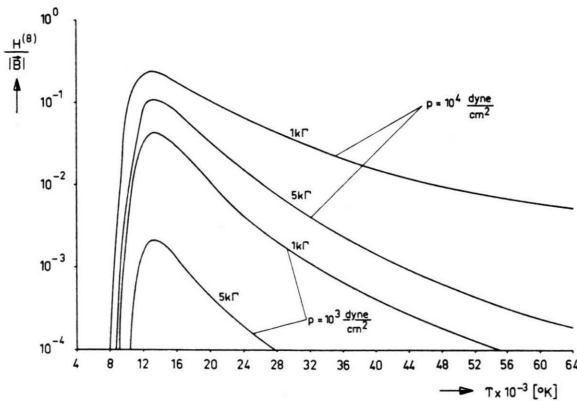


Abb. 7. Betrag des Verhältnisses $H^{(8)}/B$ in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Magnetfeldstärke.

Die unter 3. und 4. angeführten Terme verschwinden ganz allgemein im Fall eines vollionisierten Plasmas ($\mathbf{u} = \mathbf{v}_L - \mathbf{U} = 0$). Für ein statisches, teilweise ionisiertes Plasma ($\mathbf{u} = \mathbf{v}_L$) erhält man unter Berücksichtigung des $(\mathbf{v}_L \times \mathbf{B})$ -Terms auf der linken Seite von Gl. (11) ein Term-Triple analog zu dem der Stromdichte, nämlich

$$A_{u\parallel}^{(8)} \mathbf{v}_{L\parallel} + A_{u\perp}^{(8)} \mathbf{v}_{L\perp} + (1 + A_{u\perp h}) (\mathbf{v}_L \times \mathbf{B}).$$

Die Anisotropie der Koeffizienten der Geschwindigkeit wird anhand der Verhältnisse $A_{u\perp}^{(5)}/A_{u\parallel}^{(8)}$ bzw. $A_{u\perp}^{(5)}/A_{u\perp}^{(8)}$ in Abb. 8 als Funktion von Druck und Temperatur verdeutlicht. Der Ausdruck für $A_{u\perp}^{(5)}$ geht in den für $A_{u\parallel}^{(8)}$ über, wenn die Stoßzeiten wie in den Beziehungen (15) angegeben, verändert werden.

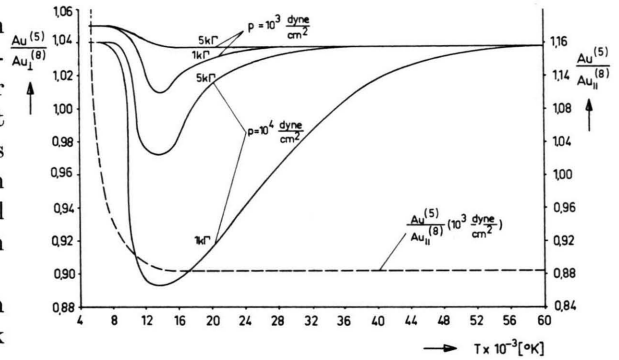


Abb. 8. Verlauf der Verhältnisse $A_{u\perp}^{(5)}/A_{u\parallel}^{(8)}$ und $A_{u\perp}^{(5)}/A_{u\perp}^{(8)}$ in Abhängigkeit von Druck, Temperatur und Magnetfeldstärke.

Ein Vergleich der φ -Komponenten der Gln. (11) und (12) macht nunmehr deutlich, daß bei stark ionisierten Plasmen die Beiträge zu j_φ und letztlich zum Druckprofil, sowohl was die Massenströmung ($\sim \mathbf{v}_L \times \mathbf{B}$) als auch den Hall-Effekt ($\sim \mathbf{j} \times \mathbf{B}$) angeht, in beiden Näherungen gleich sind; der Faktor der Stromdichte ist verschieden: in der 5-Momenten-Approximation ist es die skalare Leitfähigkeit, während es in der 8-Momenten-Approximation der Leitfähigkeitstensor ist. Dieser Unterschied kommt jedoch im MPD-Bogen nicht zum tragen, da wegen der geringen Verdrillung des meridionalen Magnetfeldes $B_\varphi \ll B$ und somit $j_\parallel, \varphi = j_\varphi B_\varphi^2/B^2 \ll j_\perp, \varphi$ ist.

Das macht die Ergebnisse der Abschnitte III.2 und III.3 verständlich.

Wir kommen nunmehr auf die Diskussion des Abschnitts III.1 zurück. Die durch die höhere Näherung verursachten und in den Beziehungen (15)

angegebenen Veränderungen der mittleren Stoßzeiten $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ erlauben es uns, die Unterschiede der 5- bzw. 8-Momenten-Approximation in bezug auf die Druckerhöhung durch ambipolare Diffusion klarzustellen. Die höhere Näherung beinhaltet nicht nur eine formelmäßig umfangreiche Struktur, was an sich schon Unterschiede mit sich bringt, sondern sie rechnet auch mit anderen Stoßzeiten $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ als die alte Theorie. Diese beiden Punkte werden in Abb. 1 klar herausgestellt. Während die durchgezogenen Kurven der 8-Momenten-Approximation und die gestrichelten Kurven der 5-Momenten-Approximation entsprechen, sind die strichpunktierten Kurven durch Einsetzen der Stoßzeiten $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ der höheren Näherung in die Gln. der alten Theorie entstanden. Dadurch erniedrigen sich praktisch die Reibungskoeffizienten und führen zu einem erhöhten Druckanstieg. Aus Abb. 1 wird klar, daß eine „Verbesserung“ der 5-Momenten-Theorie mit Hilfe der in höherer Näherung gewonnenen Stoßzeiten nicht möglich ist. Die Unterschiede zwischen 5- und 8-Momenten-Approximation bei höheren Magnetfeldern sind in Abb. 9 zu sehen.

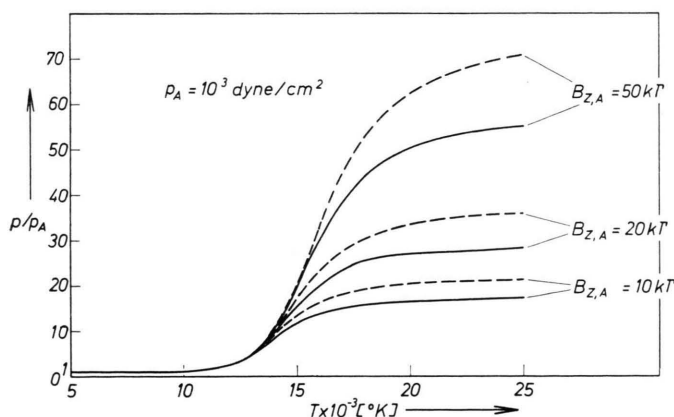


Abb. 9. Relativer Druckverlauf durch ambipolare Diffusion allein in der 8-Momenten (—) bzw. 5-Momenten (---) Approximation.

Im Fall eines vollionisierten zylindersymmetrischen Plasmas kann die in Abschnitt III.4 aufgeworfene Fragestellung der Vorzugsbereiche von Nernst-Effekt und Masseneinströmung über das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz besonders deutlich und relativ allgemein erfaßt werden. Für diesen Fall ($\mathbf{u} = 0$; $\mathbf{U} = \mathbf{v}_L$) geht die Gl. (12) bis auf die Konvektionsglieder in die von KLÜBER¹ angegebene Form über. Setzen wir die φ -Komponenten des Massenstromterms ($\mathbf{U} \times \mathbf{B}$) und des Nernst-Terms

($\nabla T \times \mathbf{B}$) gleich, so ergibt sich mit der Beziehung (16) aus A die Relation

$$U_{m\perp} \cdot B = \frac{3}{2} \frac{k}{e^2 n_e} \frac{\sigma_{\perp}}{\omega_e^2 \tau_e^2} \nabla_{m\perp} T \cdot B$$

oder

$$\frac{\nabla_{m\perp} T}{U_{m\perp} B^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \tau_e}{k m_e} \quad (16)$$

Der Ausdruck (16) ist in Abb. 10 doppellogarithmisch aufgetragen; dabei sind $\nabla_{m\perp} T$ in [$^{\circ}\text{K}/\text{cm}$], B in [Gauß], $U_{m\perp}$ in [cm/sec] und n_e in [cm^{-3}] ein-

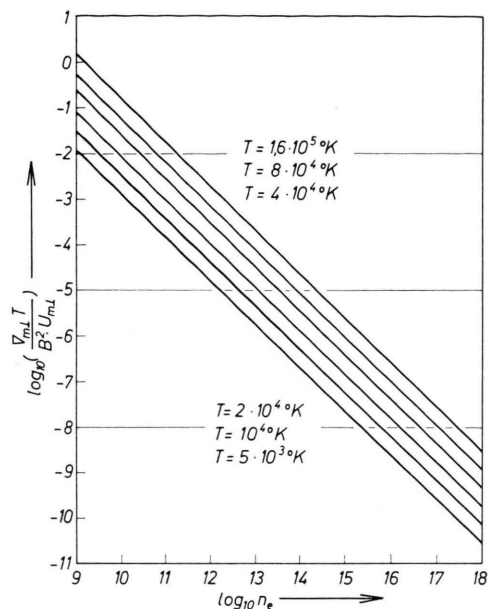


Abb. 10. Schwerpunktsbereiche für die relative Bedeutung des Nernst-Effekts (oberhalb der Geraden) und der Massenströmung (unterhalb der Geraden) in Abhängigkeit der Elektronendichte und der Temperatur.

zusetzen. Für den Parameterbereich oberhalb der jeweiligen Geraden ist vorwiegend der Nernst-Effekt für das Druckprofil von Bedeutung, während für den unteren Bereich der Einfluß der Massenströmung vorherrscht. Auf den Geraden selbst sind beide Effekte gleichberechtigt; wenn es sich um eine Masseneinströmung handelt, sind sie mit verschiedenen Vorzeichen behaftet und heben sich also in bezug auf die Bestimmung des Druckprofils auf.

Die Gl. (16) ist, solange es sich um ein vollionisiertes Plasma handelt, über $\tau_e \sim Z^{-2}$ (Z ist die Ladungszahl) in einfacher Weise von der Gasart abhängig; so sind für ein Heliumplasma alle Geraden um den Ordinatenbetrag $-\log_{10} 4 = -0,6$ zu verschieben.

⁹ K. BERGSTEDT, Z. Naturforsch. **24a**, 299 [1969].

Das schon erwähnte „Eier-Uhr“-Experiment¹ liegt nach den Datenangaben über die radiale Strömungsgeschwindigkeit von BERGSTEDT⁸ erwartungsgemäß eindeutig im Vorzugsbereich des Nernst-Effektes, zumindest für Radien $r \leq 0,6$. Die MPD-Lichtbögen, soweit von ihnen verlässliche Messungen vorliegen, bewegen sich zwar vorwiegend im Einflußbereich der Massenströmung, stoßen aber auch zum Teil in den Bereich des Nernst-Effektes. Vor allem in Querschnitten unmittelbar am Düsenaustritt dürfte der Nernst-Effekt eine Rolle spielen. Diese etwas unerwartete Feststellung ist darauf zurückzuführen, daß in MPD-Lichtbögen zwar kleinere Elektronendichten und Temperaturgradienten als in dem oben zitierten „Eier-Uhr“-Experiment vorliegen, dafür aber auch die Temperaturen und das Magnetfeld wesentlich kleiner sind.

Zusammenfassung

Die höhere Approximation bringt in bezug auf das radiale Druckprofil in MPD-Bögen relativ zur 5-Momenten-Approximation (siehe A) keine wesentlichen Änderungen was den Hall-Effekt sowie die Masseneinströmung angeht zumindest bei stark ionisierten Plasmen. Sie führt jedoch bei der ambipolaren Diffusion, auf Grund der fundamentalen Änderung des geschwindigkeitsabhängigen Anteils des Reibungsterms zu Abweichungen von den alten Resultaten. Eine eingehende Untersuchung dieser Unterschiede ist anhand der verallgemeinerten Form des Ohmschen Gesetzes durchgeführt worden. Letzteres bietet sich auch an, um ganz allgemein den Übergang vom teilweise ionisierten zum vollionisierten Plasma darzustellen und die Unterschiede zur 5-Momenten-Approximation sowohl qualitativ als auch quantitativ herauszustellen. Weiterhin liefert die 8-Momenten-Approximation die thermomagnetischen Terme, die wie anhand eines relativen Vergleichs gezeigt werden konnte, auch im Bereich der MPD-Bögen, über den Nernst-Effekt von Bedeutung sein können.

Anhang I

$$\begin{aligned}
 1/A_1 &= f_2 g_2 - d_2 l_2 - y_1 (B_r X_{24} - B_z X_{11}), \\
 \delta_1 &= y_7 A_1, & \delta_2 &= y_5 - y_2 B_z, \\
 \delta_3 &= y_2 B_r + y_6, & \delta_4 &= y_8 - y_3 B_z, \\
 \delta_5 &= y_3 B_r + y_{10}, & \delta_6 &= y_9 - y_4 B_z, \\
 \delta_7 &= y_4 B_r + y_{11}; & y_1 &= e n (g_2 + d_2) - (g_2 d_3 - d_2 g_3) / B_z, \\
 Y &= y_1 (B_r X_{23} - B_z X_{10}), \\
 y_2 &= (d_3 g_2 - d_2 g_3 + g_3 Y) / B_z, \\
 y_3 &= (d_2 l_3 - f_3 g_2 - l_3 Y) / B_z - d_2 - g_2 + Y, \\
 y_4 &= (d_2 k_3 - g_2 e_3 - k_3 Y) / B_z, \\
 y_5 &= y_1 (B_r X_{17} - B_z X_4), \\
 y_6 &= y_1 (B_r X_{18} - B_z X_5), & y_9 &= y_1 (B_r X_{26} - B_z X_{13}), \\
 y_7 &= y_1 (X_7 B_r - X_6 B_z), & y_{10} &= y_1 (B_r X_{27} - B_z X_{14}), \\
 y_8 &= y_1 (B_r X_{25} - B_z X_{12}), & y_{11} &= y_1 (B_r X_{28} - B_z X_{15}); \\
 X_1 &= \frac{g_3 + d_3}{g_2} (e n + g_3 / B_z) B_r, \\
 X_2 &= g_2 + d_2 + X_1 B_z / B_r, & X_3 &= g_1 + d_1 + X_1 B_r / B_z, \\
 X_4 &= \left(\frac{1}{X_2} - \frac{X_1}{X_2 X_1^2 - X_2 X_3} \right) (g_2 + d_2), \\
 X_5 &= - \frac{X_1}{X_1^2 - X_2 X_3} (g_1 + d_1), & X_6 &= \frac{X_4}{(g_2 + d_2)}, \\
 X_7 &= \frac{X_1}{X_1^2 - X_1 X_2}, \\
 X_{10} &= \left[X_7 \left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{B_r}{B_z} \right) - \frac{1}{X_2} \right] \frac{g_3 + d_3}{g_2}, \\
 X_{11} &= \left[X_7 \left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{B_r}{B_z} \right) - \frac{1}{X_2} \right] \left[l_3 + f_3 - \frac{l_2 (g_3 + d_3)}{g_2} \right], \\
 X_{12} &= (l_2 + f_2) \left[X_7 \left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{B_r}{B_z} \right) - \frac{1}{X_2} \right], \\
 X_{13} &= \frac{e_2 + k_2}{l_2 + f_2} X_{12}, & X_{14} &= (l_1 + f_1) X_7, \\
 X_{15} &= \frac{e_2 + k_1}{l_1 + f_1} X_{14}, & X_{16} &= X_7 X_2 / X_1, \\
 X_{17} &= - (g_2 + d_2) X_7, & X_{18} &= - (g_1 + d_1) X_{16}, \\
 X_{23} &= X_{16} \left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{B_r}{B_z} \right) \left(\frac{g_3 + d_3}{g_2} \right), \\
 X_{24} &= X_{16} \left(\frac{X_1}{X_2} - \frac{B_r}{B_z} \right) \left[l_3 + f_3 - \frac{l_2 (g_3 + d_3)}{g_2} \right], \\
 X_{25} &= X_{16} (l_2 + f_2) \frac{X_1}{X_2} = (l_2 + f_2) X_7, \\
 X_{26} &= X_{17} (e_2 + k_2) \frac{X_1}{X_2} = (e_2 + k_2) X_7, \\
 X_{27} &= X_{16} (l_1 + f_1), & X_{28} &= X_{16} (e_1 + k_1).
 \end{aligned}$$